Взаимосвязь графических и аналитических способов решения позиционных задач.

Иванов Г.С.
(Московский государственный авиационный институт, г. Москва, Россия)

Работа на ФПКП МГАИ показала, что большинство преподавателей кафедр начертательной геометрии и инженерной графики достаточно хорошо владеет графическими способами решения задач. Однако, аналитическое решение тех же задач вызывает у них зачастую большие затруднения. Некоторые из них в свое оправдание приводят слова Г. Монжа: «Если бы мне пришлось снова начать эту работу, я бы напечатал ее в два столбца, в первом я поместил бы решения задач путем вычислений, а во втором – решения тех же задач, но исполненные путем графических построений. Читатели, пожалуй, были бы очень удивлены, увидя, что второй столбец почти всегда заслуживал бы предпочтения, как по ясности, так и по простоте доказательств».

Заметим, что эти слова по свидетельству М. Оливье ([1], стр. I – XI) относятся к семидесятым годам восемнадцатого века, когда Г. Монжу в Мезьерской инженерной школе разрешили основать кафедру начертательной геометрии, но из-за соображений секретности запретили что-либо печатать по существу его геометрии. Г. Монж смирился с этим запретом и начал заниматься аналитическими способами решения задач и вопросами теории поверхностей.

Вероятно, в приведенных словах сквозит чувство досады на запрет публикации и, как бы сказали в наше время, элемент рекламы созданной им начертательной геометрии. Эта гипотеза вполне объясняется содержанием п. 10 первого раздела его книги [2], где он сравнивает начертательную геометрию с алгеброй и завершает его словами: «Следует пожелать, чтобы обе эти науки изучались вместе: начертательная геометрия внесла бы присущую ей наглядность в наиболее сложные аналитические операции, а анализ в свою очередь внес бы в геометрию свойственную ему общность». Заметим, что эти слова были сказаны спустя 20-25 лет после приведенных выше и поэтому более точно отражают взгляды Г. Монжа, ставшего к этому времени одним из крупнейших математиков Европы.

В свете вышеизложенного целью настоящей статьи является иллюстрация необходимости владения преподавателями кафедр начертательной геометрии графическими и аналитическими способами решения типовых задач. На примерах решения позиционных задач попытаемся показать взаимосвязь и взаимодополнение этих способов для упрощения как графических, так и аналитических алгоритмов их решения.

Начнем с задачи на принадлежность. Здесь наибольший интерес представляет задача о принадлежности некоторой точки A, заданной одной своей проекцией A_1 (координатами x_A, y_A) или A_2 (координатами x_A, z_A), какой-нибудь поверхности ϕ.

Аналитически решение этой задачи сводится к нахождению корней некоторого уравнения

$$\varphi(z)=0 \text{ или } \overline{\varphi}(y)=0, \quad (1)$$

получающегося подстановкой координат проекции A_1 или A_2 в уравнение $\phi(x,y,z)=0$ данной поверхности ϕ. Пусть для конкретности ϕ^n будет алгебраической поверхностью $n-го$ порядка. Тогда уравнения (1) также будут уравнениями $n-ой$ степени, и теоретически будут иметь n корней. Другими словами, проецирующая прямая, проходящая через A_1 или A_2, пересекает данную поверхность в n точках (действительных, совпавших, мнимых или их сочетаниях в различных комбинациях). Последнее обстоятельство зависит от вида и комбинаций корней уравнений (1).

В [3] приведен пример циклической поверхности (см. рис. 2.71) и выведено ее уравнение (стр. 74):

$$(x-kz-b)^2+(y-qz-c)^2-$$
$$-(A_o+A_1z+A_2z^2+A_3z^3-kz-b)^2-$$
$$-(D-qz-c)^2=0. \quad (2)$$

Это уравнение шестой степени и определяет поверхность шестого порядка ϕ^6. Поэтому горизонтально проецирующая прямая m, проходящая через данную проекцию $M_1(x_M, y_M)$, должна пересечь поверхность ϕ^6 в шести точках $M^i (i=1,2,...,6)$, аппликаты z^i которых определяются из решения уравнения

$$(x_M-kz-b)^2+(y_M-qz-c)^2-$$
$$-(A_o+A_1z+A_2z^2+A_3z^3-kz-b)^2-$$
$$-(D-qz-c)^2=0.$$

Корни таких уравнений при $n>2$ вычисляются известными из математического анализа итерационными методами. При этом вычисляются только их действительные значения.

В то же время, при подстановке в (2) координат x_N, z_N фронтальной проекции N_2 некоторой точки $N \in \phi^6$ получаем лишь квадратное уравнение от одной переменной y:

$$(x_N - kz_N - b)^2 + (y - qz_N - c)^2 -$$
$$-(A_o + A_1 z_N + A_2 z_N^2 +$$
$$+ A_3 z_N^3 - kz_N - b)^2 -$$
$$(D - qz_N - c)^2 = 0$$
$$\text{или } y = qz_N + c$$
$$\pm\sqrt{(A_o + A_1 z_N + A_2 z_N^2 + A_3 z_N^3 - kz_N - b)^2 + + (D - qz_N - c)^2 - (x_N - kz_N - b)^2}.$$

Это означает, что несобственная прямая $u^\infty \subset 0xy$ является для поверхности ϕ^6 четырехкратной.

Такое обстоятельство характерно для поверхностей, образованных кинематическим способом, когда при движении достаточно простой образующей (прямой, окружности, и т.д.) получается поверхность высокого порядка, которая обязательно содержит кратные точки или (и) линии. Например, линейчатая поверхность, называемая «прямым клином» (см. [3], рис. 2.67) является поверхностью четвертого порядка (см. [3], уравнение (2.47)). Она с любой из горизонтально, фронтально и профильно проецирующих прямых пересекается лишь в двух точках. Значит, она кроме своего двукратного ребра b имеет еще две двукратные прямые: несобственные прямые $u^\infty \subset 0xy$ и $t^\infty \subset 0yz$. Вот почему она пересекается с плоскостями $\Gamma^i \parallel 0xy$ по эллипсам, а с плоскостями $\Sigma^i \parallel 0yz$ по двум прямолинейным образующим.

Таким образом, знание конструктивного способа образования поверхности и, как следствие, возможность вывода ее уравнения позволяют определить порядок поверхности, количество и вид ее особых элементов, их кратность. В свою очередь, наличие кратной прямой l существенно упрощает как графические, так и аналитические алгоритмы решения задач на принадлежность, так как порядок m сечения a^m поверхности ϕ^n некоторой плоскостью $\Gamma \supset l$ всегда меньше порядка n поверхности, точнее,

$$m = n - j,$$

где j - кратность прямой l.

Завершая рассмотрение задачи на принадлежность $A \in \phi^n$, отметим еще один нюанс. Задание координат x_A, y_A или x_A, z_A проекций A_1 или A_2 данной точки A, как было выше отмечено, равносильно заданию проецирующих прямых $A_1 \in g \perp \Pi_1$ и $A_2 \in q \perp \Pi_2$. Эти прямые, в свою очередь, рассматриваются как линии пересечения пар плоскостей уровня:

$$g = \Gamma(x = x_A) \cap \Sigma(y = y_A),$$
$$q = \Delta(x = x_A) \cap \Theta(z = z_A). \qquad (3)$$

Поэтому на первый взгляд кажется, что определение недостающих проекций данной точки $A \in \phi^n$ сводится к построению точек пересечения прямой g с фронталью $f^n = \phi^n \cap \Sigma$, или прямой q с горизонталью $h^n = \phi^n \cap \Theta$, порядки которых равны порядку n поверхности ϕ^n.

Учитывая сказанное, при графическом решении этой задачи через данную точку $A(A_1)$ или $A(A_2)$ проводится не фронталь f^n или горизонталь h^n, а графически простая линия m, принадлежащая этой поверхности. То есть, выбирается такая секущая плоскость или поверхность λ, которая инцидентна кратной(ым) линии(ям) и пересекает данную поверхность ϕ^n по кривой, распавшейся на две или более составляющие. Поэтому порядки n_i этих составляющих будут меньше степени n данной поверхности.

На языке аналитической геометрии это означает, что уравнение сечения m в отличии от уравнений кривых f^n и h^n будет приводимым и вычисление его корней будет выполняться отдельно для каждой составляющей. Существенный эффект должен быть тогда, когда степени n_i этих составляющих не выше двух: тогда без итерационных операций можно вычислить как действительные, так и мнимые корни уравнений этих составляющих.

Однако, рассмотрение простого примера показывает некорректность приведенных рассуждений. Пусть поверхность ϕ^4 тора образована вращением окружности l

$$(x-4) + z^2 = 9$$

вокруг оси $0z$. Тогда ее уравнение имеет вид

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 9. \qquad (4)$$

Дана проекция $A_1(2, \quad 5)$ точки A, принадлежащей поверхности ϕ^4; требуется вычислить ее недостающую координату z_A (построить недостающую проекцию A_2).

Подставив известные координаты точки A в уравнение (4), которое предварительно перепишем в виде

$$z^2 = 9 - (\pm\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2, \qquad (5)$$

имеем

$$z^2 = 9 - (\pm 5{,}38 - 4)^2,$$

то есть вопреки нашим ожиданиям надо решить лишь приводимое уравнение четвертой степени.

Объяснение заключается в том, что через прямые g и q проходят не только по две плоскости уровня, но и по пучку проецирующих плоскостей $(g),(q)$, то есть задание координат проекций A_1 или A_2 данной точки $A \in \phi^n$ равносильно заданию указанных пучков проецирующих плоскостей. В нашем примере кривая, заданная уравнением (5), представляет сечение поверхности тора плоскостью, проходящей через точку $A(A_1)$ и ось $0z$. Поэтому при аналитическом определении недостающей координаты данной точки $A \in \phi^n$ автоматически выбирается простейшее сечение $m \ni A$ поверхности ϕ^n.

Очевидно, все вышеизложенные рассуждения о целесообразности аналитической оценки степени сложности графических алгоритмов решений на принадлежность справедливы и в случае определения точек M^i пересечения некоторой пространственной алгебраической кривой l^k порядка k с алгебраической поверхностью ϕ^n того или иного вида.

Аналитически определение координат точек M^i сводится к решению системы трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными, из которых два уравнения

$$\Gamma^{k_1}(x,y,z)=0,$$
$$\overline{\Gamma}^{k_2}(x,y,z)=0, \qquad (6)$$

где $k_1 \cdot k_2 = k$, задают кривую l^k, а третье

$$\phi^n(x,y,z)=0 \qquad (7)$$

является уравнением данной поверхности ϕ^n.

Графическому заданию кривой l^k в виде ее проекций $l_1^{k_1}, l_2^{k_2}$ соответствует система уравнений

$$\Gamma^{k_1}(x,y)=0,$$
$$\overline{\Gamma}^{k_2}(x,z)=0, \qquad (6a)$$

описывающих две проецирующие цилиндрические поверхности $\Gamma^{k_1}, \overline{\Gamma}^{k_2}$. Напомним, что обычно $k_1 = k_2 = k$, но при пересечении проецирующих цилиндрических поверхностей их образующие являются для l^k соответственно k_1-, k_2-секантами. Поэтому $k_1 \neq k_2 \neq k$ (см. [3], стр.42). Эти поверхности пересекаются по пространственной кривой порядка $k_1 \cdot k_2 = k$.

Заметим, что системы уравнений (6), $(6a)$, как и в случае задания проецирующих прямых (3), определяют не только две данные поверхности, но и множество поверхностей (Γ^k), проходящих через линию l их пересечения.

Если для аналитического решения этой задачи совершенно несущественно, какая пара поверхностей из множества (Γ^k) определяет кривую l^k, то при графическом ее решении творческая часть состоит в выборе вида посредника Γ^k, принадлежащего множеству (Γ^k) и пересекающегося с данной поверхностью ϕ^n по приводимой кривой m^{kn}. Выбор вида посредника Γ^k зависит как от особенностей кривой l^k, так и поверхности ϕ^n.

Очевидно, что аналитические выкладки проще, если кривая l^k задана системой $(6a)$, соответствующей заключению данной кривой в проецирующую цилиндрическую поверхность Γ^{k_1} или Γ^{k_2}. В этом случае порядок t линии $m^t = \phi^n \cap \Gamma^{k_1}$ или $m^t = \phi^n \cap \Gamma^{k_2}$ будет равен nk_1 или nk_2 и, в конечном счете, определение координат nk_1k_2 точек $M^i = l^k \cap \phi^n$ сведется к решению уравнения степени nk_1k_2 от одной переменной.

Заключение кривой l^k в какую-либо другую поверхность Γ^g, где $g > k$, приводит к повышению порядка t линии $m^t = \phi^n \cap \Delta^g$ и, как следствие, к усложнению вычислений. Заметим, что геометрически это значит выбор нового множества поверхностей более высокого порядка, в состав базисной кривой которого в виде составляющей входит данная кривая l^k. Однако, при графическом решении таких задач это может оказаться несущественным, если линия m^t распадается на графически простые сечения.

Например, пусть требуется построить точки пересечения кривой l^k с поверхностью вращения ϕ^n. При проведении через l^k проецирующей цилиндрической поверхности Δ^k, порядок t пространственной кривой $m^t = \phi^n \cap \Delta^k$ будет равен nk. Если же через l^k провести поверхность вращения Δ^{2k}, соосную с ϕ^n, то порядок t их линии пересечения m^t будет $2nk$, то есть в два раза выше. Но в силу соосности поверхностей ϕ^n и Δ^{2k} линия m^t распадется на nk их общих параллелей. При этом аналитическое решение не усложняется, а графическое решение сведется к построению точек пересечения главных меридианов поверхностей ϕ^n и Δ^{2k}.

Эти же соображения положены в основу графического алгоритма определения точек пересечения кривой l^k с конической (цилиндрической) поверхностью $\phi^n(S, a^n)$. В этом случае обычно через l^k проводят вспомогательную коническую поверхность $\Delta^k(S, l^k)$ с вершиной S, что приводит к распадению линии $m^t = \phi^n \cap \Delta^k$ на nk их общих образующих.

Такой же подход можно использовать при построении точек пересечения кривой l^k с линейчатой поверхностью общего вида $\phi^n(a^{n_1}, b^{n_2}, c^{n_3})$, где $n = 2n_1n_2n_3$. Так как направляющие $a^{n_1}, b^{n_2}, c^{n_3}$ являются на ϕ^n соответственно n_2n_3-, n_1n_3-, n_1n_2-кратными (см. [4], стр. 85-88), то в качестве посредника Δ можно взять линейчатую поверхность с направляющими l^k и какими-либо двумя из трех направляющих поверхности ϕ^n. Тогда поверхности Δ и ϕ^n, имеющие общие две кратные направляющие, пересекаются дополнительно не по пространственной кривой, а только по общим образующим поверхностей ϕ^n и Δ.

И, наконец, сопоставим графические и аналитические алгоритмы построения линии l^t пересечения двух алгебраических поверхностей ϕ^{n_1} и Δ^{n_2}, где $t = n_1 \cdot n_2$. Аналитически задача сводится к многократному решению системы трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными: уравнений данных поверхностей ϕ^{n_1}, Δ^{n_2} и уравнения посредника Γ_i с некоторым переменным параметром. Творческая часть алгоритма состоит в выборе вида посредника с целью упрощения вычислительных процедур при решении указаний системы уравнений. В начертательной геометрии изучены области применения в качестве посредников плоскостей, сфер, конических и цилиндрических поверхностей.

К сожалению, эти области достаточно узки, что нашло свое отражение в использовании в реальной практике вычислительных центров лишь способа плоскостей уровня. Поэтому изучение других способов при ограниченном объеме часов, отводимых учебными планами на начертательную геометрию, едва ли оправдано.

Отказ от преподавания отживших разделов курса и концентрация внимания студентов на взаимосвязи графических и аналитических способов решения задач должны повысить общий теоретический уровень подготовки специалистов. При этом следует помнить, что в инженерной практике графические способы решения задач отжили свой век и, в основном, они служат теоретической (конструктивной) базой для разработки их аналитических эквивалентов с последующей программной реализацией.

Необходимость пересмотра содержания и структуры курса, методики его преподавания кроме указанных выше причин вызвана и тем, что в инженерной практике в основном фигурируют сегменты (отрезки, дуги, отсеки) геометрических фигур и составленные из них одно-, дву- и многомерные обводы. Это обстоятельство вызывает особенности в решении как позиционных, так и метрических задач. Представляется, что все эти проблемы могут быть успешно решены лишь при разумном сочетании графических, точнее, конструктивных и аналитических подходов.

Литература.

1. Курдюмов В.И. Курс начертательной геометрии. - С. -Петербург, 1895, - 848 с.
2. Монж Г. Начертательная геометрия. - М. -Л.: изд. АН СССР, 1947, - 291с.
3. Иванов Г.С. Начертательная геометрия, - М.: Машиностроение, 1995, - 224 с.
4. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии. - М.: Машиностроение, 1998, - 158 с.