

Клеточная Модель Поверхности Для Автоматизации Расчета Кратчайшей Линии Между Двумя Точками Топографической Поверхности

Виталий Владимирович Найханов
Ирина Бадмаевна Балданова

Восточно-Сибирский государственный технологический университет
Улан-Удэ, Россия

Аннотация

Задача построения оптимальных, в том числе и по минимуму длины, путей на топографической поверхности актуальна при проектировании и строительстве нефте- и газопроводов, автомобильных дорог, при прокладке кабелей и т.д. В последнее время исследования в этой области направлены на использование волнового алгоритма Ли [1], согласно которому решается классическая задача о кратчайшем пути на графе, представляющем собой дискретизированный план местности, по правилам, которые устанавливает волновой алгоритм Ли. Однако, на сегодняшний день сложилось мнение о том, что этот алгоритм обладает одним неисправимым недостатком – необходимостью работать с большими массивами информации, которая, в свою очередь, приводит к низкому быстродействию при его программной реализации. С целью устранения этого недостатка в данной статье предпринята попытка оптимального описания, с точки зрения экономии вычислительных затрат, дискретной информации о геометрической модели исследуемой поверхности.

Ключевые слова: Клеточная модель, Волновой алгоритм Ли, Кратчайший путь.

1. ВВЕДЕНИЕ

Так как размеры соединяемых и соединяющих элементов пренебрежительно малы по сравнению с длиной инженерных коммуникаций, то в качестве геометрических моделей соединяемых пунктов принимаем точки, а соединяющих их коммуникаций – линии. Необходимо определить все искусственные и естественные преграды. На участках, где они располагаются, следует выполнить нарушение связности топографической поверхности. В результате за исходные данные принимаем некоторую абстрактную топологически нерегулярную поверхность и две точки, инцидентные ей, которые требуется соединить кратчайшей линией.

Наибольший интерес в плане снижения временных затрат по обработке геометрической информации представляет для нас использование иерархической структуры описания геометрической модели исследуемой поверхности. В рамках модели допускается множественное описание геометрии поверхности – верхние уровни задают ее грубо, а нижние – с возрастающей степенью точности. Нами предлагается иерархическое описание топографической поверхности на базе ее клеточной модели. Абстрактная схема клеточной модели является топологическим инвариантом, и ее

наличие позволяет с помощью предложенной в [3] модификации волнового алгоритма Ли найти клетки, соответствующие области прохождения искомой линии, что существенно уменьшит

вычислительные затраты на этапе непосредственного построения кратчайшей линии.

2. СТРУКТУРА ДАННЫХ

Согласно модификации волнового алгоритма Ли, предложенной в [3], клеточная модель топографической поверхности представляет собой некоторое конечное множество кубических клеток $G = \{\mathbb{K}_n\}$, $1 \leq n \leq N$, которым инцидентна данная поверхность, с установленным правилом соседства клеток: две клетки считаются соседними, если имеют общую грань. Такая трехмерная дискретная модель может быть представлена в памяти ЭВМ в виде массива, задаваемого матрицей

$$\begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ i_n & j_n & k_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ i_N & j_N & k_N \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где i, j, k – координаты центра клетки, через которую непосредственно проходит исследуемая поверхность; N – общее количество ячеек, инцидентных топографической поверхности; n – номер клетки, $1 \leq n \leq N$, который является заголовком для реберного списка с двойными связями РСДС, описывающего данную клетку. Проверку инцидентности клетки исследуемой поверхности можно выполнить с помощью следующей системы неравенств, описывающей границу клетки:

$$\begin{cases} (x - \xi_1)(\xi_1 + p - x) \geq 0 \\ (y - \xi_2)(\xi_2 + p - y) \geq 0 \\ (z - \xi_3)(\xi_3 + p - z) \geq 0 \end{cases}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – координаты первой вершины клетки (куба); p – шаг дискретизации. РСДС для куба представлен в табл. 1, соответствующая нумерация вершин и граней куба показана на рис. 1.

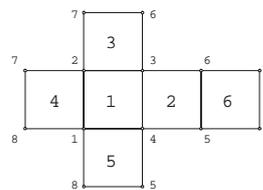


Рис. 1

Здесь $V1$ - начало ребра, $V2$ – конец ребра, $F1$ – грань, расположенная слева от текущего ребра, $F2$ – грань, расположенная справа от текущего ребра. Указатель $P1$ (соответственно $P2$) задает реберный узел, содержащий первое ребро, встречаемое вслед за ребром $(V1, V2)$, при повороте от него против часовой стрелки вокруг $V1$ (соответственно $V2$).

Табл. 1

Инф. поле Реберный узел	$V1$	$V2$	$F1$	$F2$	$P1$	$P2$
1	1	2	4	1	2	3
2	8	1	4	5	4	5
3	2	3	3	1	6	7
4	7	8	4	6	6	8
5	1	4	1	5	1	9
6	7	2	3	4	10	1
7	3	4	2	1	11	5
8	8	5	5	6	2	12
9	4	5	2	5	7	8
10	6	7	3	6	11	4
11	6	3	2	3	12	3
12	5	6	2	6	9	10

3. СТРУКТУРА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ

Как видно, для хранения (1) требуется большой объем памяти ЭВМ. Некоторая экономия может быть достигнута при помощи использования целочисленных неотрицательных координат клеток дискретной модели G поскольку, вообще говоря, при подсчетах и индексировании – основных операциях, проводимых на дискретной модели, нет необходимости в отрицательных числах. Кроме того, к любому представлению неотрицательных целых легко присоединить одиночный знаковый двоичный разряд. Более существенная экономия достигается следующим образом. Воспользуемся тем, что каждая координата i, j, k всегда удовлетворяет соответствующему неравенству:

$$0 \leq i < pm_1, \quad 0 \leq j < pm_2, \quad 0 \leq k < pm_3,$$

где m_1 - число делений на положительной полуоси OX при кубической декомпозиции пространства R^3 ; m_2 - число делений на положительной полуоси OY ; m_3 - число делений на положительной полуоси OZ ; p – шаг дискретизации, равный натуральному четному числу. Будем рассматривать натуральные координаты i, j, k как запись некоторого натурального числа \aleph в смешанной системе счисления с основаниями pm_1, pm_2, pm_3 соответственно. Уменьшим на одну единицу каждую натуральную координату. Тогда десятичное представление этого числа будет иметь вид:

$$\aleph = (i-1) + (j-1)pm_1 + (k-1)p^2m_1m_2. \quad (2)$$

Выражение (2) устанавливает отображение множества натуральных координат на множество натуральных чисел. Обратное отображение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} k &= \left[\frac{\aleph}{p^2m_1m_2} \right] + 1, \\ j &= \left[\frac{\aleph - (k-1)p^2m_1m_2}{pm_1} \right] + 1, \\ i &= \aleph - (j-1)pm_1 - (k-1)p^2m_1m_2 + 1, \end{aligned} \quad (3)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть. Тот факт, что каждая клетка данной клеточной модели G соответствует единственному числу, и каждое положительное целое число имеет единственное представление, следует из простого обобщения результатов для обычных систем счисления, которые являются частным случаем смешанных систем [4].

Таким образом, мы получаем построчную запись матрицы (1) в виде конечной последовательности натуральных чисел:

$$\aleph_1, \dots, \aleph_n, \dots, \aleph_N, \quad (4)$$

расположенных по порядку в последовательных ячейках памяти ЭВМ. Во время действия волнового алгоритма Ли согласно [3] могут возникнуть ситуации, когда требуется выполнить операции включения новых и (или) исключения имеющихся клеток, а также сцепления и (или) разбиения последовательностей клеток. В связи с этим наиболее удобным будет использование такого представления конечной последовательности (4) как дважды связанный список. В этом списке каждый элемент $\aleph_n, 1 \leq n \leq N$, имеет два указателя, отмечающих ячейки памяти ЭВМ, в которых записаны элементы \aleph_{n-1} и \aleph_{n+1} (рис. 2). Поэтому для любого элемента \aleph_n обеспечивается мгновенный прямой доступ к предыдущему и последующему элементам.

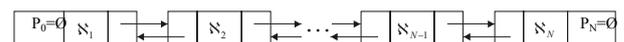


Рис. 2

Например, в силу правил, согласно которым осуществляется построение клеточной модели G , может возникнуть ситуация, когда у текущей клетки \aleph_n нет свободных соседних клеток, но есть свободные клетки, имеющие с текущей клеткой общее ребро. В этом случае, поскольку процесс формирования фронта числовой волны имеет регулярный (структурированный) характер в соответствии с установленным правилом соседства клеток, то, в целях сохранения такой регулярности, предлагается корректировка клеточной модели G путем включения новых клеток, образующих непустое множество свободных соседних клеток.

Обозначим множество клеток, соседних с клеткой \aleph_n , как $C(\aleph_n), C(\aleph_n) \subseteq G$. Максимальное количество клеток в $C(\aleph_n)$ равно шести:

$$C(\aleph_n) = \{(i \pm p, j, k), (i, j \pm p, k), (i, j, k \pm p)\}.$$

Если исключить из $C(\mathcal{N}_n)$ те клетки, которым уже приписаны веса числовой волны, то получим множество $C^*(\mathcal{N}_n)$, которое будем называть множеством преемников. $C^*(\mathcal{N}_n) \subseteq C(\mathcal{N}_n)$ и число клеток в $C^*(\mathcal{N}_n)$ никогда не превышает шести. Пусть $D^*(\mathcal{N}_n)$ – множество свободных клеток, имеющих с текущей клеткой \mathcal{N}_n общее ребро. $D^*(\mathcal{N}_n) \subseteq D(\mathcal{N}_n) \subseteq G$.

$$D(\mathcal{N}_n) = \{(i \pm p, j \pm p, k), (i, j \pm p, k \pm p), (i \pm p, j, k \pm p)\}.$$

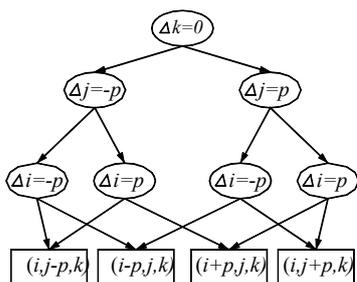
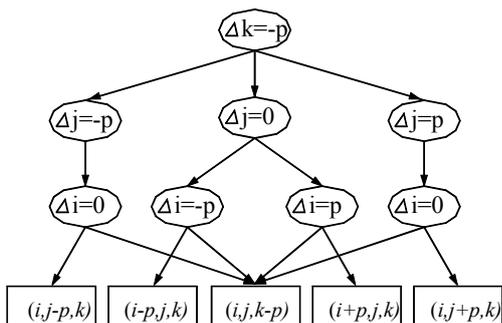
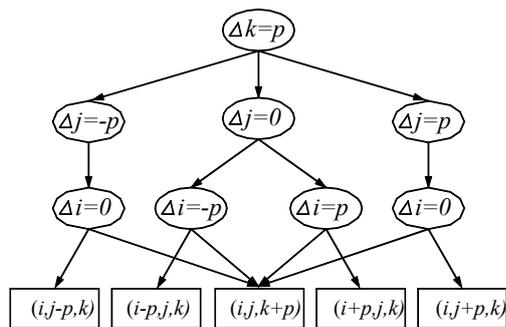


Рис. 3

Клетку, которой инцидентна одна из двух заданных точек, обозначим «старт» S ; клетку, которой инцидентна вторая заданная точка – «финиш» F .

Тогда алгоритм распространения числовой волны на трехмерной дискретной модели поверхности сложной формы будет заключаться в следующем.

На первом шаге выполняется проверка $S=F$. Если $S=F$, то работа алгоритма заканчивается. В противном случае выполняется проверка $C^*(S)=\emptyset$. Если у клетки «старт»

нет свободных соседних клеток, то выполняется проверка $D^*(S)=\emptyset$, при подтверждении которой работа алгоритма заканчивается. Если $D^*(S) \neq \emptyset$, то клетке «старт» присваивается вес, равный нулю, $W_0[S]=0$, и к ней добавляются две клетки, образующие непустое множество $C^*(S)$. На рис. 3 изображены все двенадцать возможных случаев и даны координаты соответствующей пары соседних клеток, которую необходимо добавить в G относительно текущей клетки с координатами (i, j, k) . Следовательно, если $D^*(S) \neq \emptyset$, то создается множество преемников $C^*(S) \neq \emptyset$, и строится первый фронт числовой волны:

$$W_1[C^*(S)] = W_0[S] + 1.$$

Далее последовательно, шаг за шагом, на основе аналогичных рассуждений строятся второй, третий, ..., t -ый фронт волны согласно принципу присваивания весов:

$$W_t[C^*(\mathcal{N}_n)] = W_{t-1}[\mathcal{N}_n] + 1,$$

где t – номер фронта числовой волны; \mathcal{N}_n – текущая клетка с координатами (i, j, k) . Распространение числовой волны продолжится до тех пор, пока не выполнится условие:

$$C^*(\mathcal{N}_n) = \emptyset \text{ и } D^*(\mathcal{N}_n) = \emptyset,$$

или пока клетка «финиш» не войдет в $(t+1)$ -ый фронт. В этом случае $W_{t+2}[C^*(F)] = \emptyset$ и работа алгоритма распространения числовой волны заканчивается.

Максимальное количество клеток в t -ом фронте волны согласно предлагаемому алгоритму будет равняться:

$$\alpha_t = 4t^2 + 2 \text{ при } t \geq 1.$$

Общее количество ячеек рабочего пространства R^3 , ограниченного t -ым фронтом волны, равно:

$$\beta_t = \sum_{i=1}^t \alpha_i + 1,$$

что определяет максимальный объем требуемой памяти ЭВМ.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммарный эффект экономии времени от действия [3] на этапе создания клеточной модели топографической поверхности может быть достигнут за счет использования такой структуры представления данных в памяти ЭВМ как дважды связанный список, который не требует полного перебора и сортировки при корректировке клеточной модели и обеспечивает быстрый бинарный поиск, что компенсирует временные затраты на упаковку (2) и распаковку (3).

Предложенная клеточная модель топографической поверхности позволяет уменьшить объем расчетной информации за счет первоначальной декомпозиции пространства R^3 на клетки достаточно больших размеров и выполнения на них волнового алгоритма Ли. Полученное множество разбивается на клетки меньшего размера и т.д. Вложенность циклов по уменьшению

клеток может быть произвольной. Это позволит последовательно анализировать ситуацию до мельчайших подробностей. При этом уменьшать и анализировать предполагается только те клетки, которые были выбраны на предшествующем этапе.

5. Литература

- [1] Lee C.Y. An algorithm for path connections and its application // IRE Trans. on Electron. Comput., 1961, Vol. 10, №3, pp. 346-365.
- [2] Гюйгенс Х. Трактат о свете. – М.: ОНТИ, 1935. – 152 с.
- [3] Найханов В.В., Балданова И.Б. Трехмерная интерпретация волнового алгоритма Ли // Наука и образование на рубеже тысячелетий: Сб. докл. междунар. конф., часть 1 / Чит ГТУ. – Чита, 1999. – С. 17-20.
- [4] Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. – М.: Мир, 1980. – 478 с.

Виталий Владимирович Найханов – д.т.н., проф., зав. каф. ИКГ ВСГТУ, проректор по ИНТО ВСГТУ.

Ирина Бадмаевна Балданова – аспирант каф. ИКГ ВСГТУ

670013, Бурятия, г.Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40 А,
ВСГТУ, кафедра ИКГ

E-mail: ikg@esstu.ru

Сайт: <http://www.esstu.ru>