Алгоритмы для быстрого вычисления базисных циклов групп гомологий и распознавания топологического типа двумерных полиэдров

Гордиенко Павел Андреевич
Крахнов Александр Дмитриевич
Яковлев Евгений Иванович[1]
ННГУ
Нижний Новгород, Россия.

Аннотация

Разработаны эффективные алгоритмы для изучения топологической структуры двумерных полиэдров трехмерного евклидова пространства. Центральный результат – метод быстрого вычисления базисных циклов одномерных групп гомологий без применения матриц инциденций.

Исследуемые объекты и их топологические характеристики.

Объектами исследования настоящей работы являются связные компактные двумерные полиэдры трехмерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^3$. Каждый такой полиэдр представляет собой правильное объединение конечного множества симплексов размерностей n = 0,1,2. Поэтому он задается списком вершин, ребер и треугольников, а также списком троек действительных чисел, являющихся координатами вершин в пространстве $\boldsymbol{R}^3$. Первые три списка образуют симплициальный комплекс (или триангуляцию) полиэдра, сам полиэдр при этом может рассматриваться как реализация этого комплекса.

Для нас имеют значение те свойства полиэдра, которые сохраняются при топологических преобразованиях, они называются топологическими. В двумерном случае важнейшими составными частями полиэдра, определяющими его топологический тип, являются:

- симплексы, нарушающие однородность,
- линии ветвления,
- изолированные особые точки,
- край;
- ручки.

Для исключения возможных разночтений уточним терминологию. При этом всюду без дополнительных оговорок считается, что P – двумерный и связный полиэдр в пространстве $\boldsymbol{R}^3$.

Полиэдр P называется однородным, если любое его ребро a является гранью (стороной) некоторого двумерного симплекса $\Delta \subset P$. Если же для a сформулированное условие не выполнено, то мы будем говорить, что ребро a нарушает однородность полиэдра или является его внешним ребром. Объединение всех внешних ребер полиэдра представляет собой его подкомплекс P^e.

Полиэдр P называется локально евклидовым или многообразием, если каждая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной $\boldsymbol{R}^2$ или полуплоскости $\boldsymbol{R}^2_+$. Если P – не локально евклидов полиэдр и для точки $u \in P \setminus P^e$ нет окрестности, гомеоморфной $\boldsymbol{R}^2$ или $\boldsymbol{R}^2_+$, то она будет считаться особой. Множество всех особых точек полиэдра P образует одномерный подкомплекс $P^s \subset P$. Его компоненты связности могут иметь размерности 0 и 1. Нульмерные компоненты представляют собой изолированные особые точки. Одномерные компоненты подкомплекса P^s называются линиями ветвления.

Ребро $a \subset P$, инцидентное только с одним 2-симплексом полиэдра, принято называть краевым. Объединение краевых ребер образует край ∂P. Заметим, что концы краевого ребра могут оказаться особыми точками.

Пусть v – вершина полиэдра P, $\Delta_1,\ldots,\Delta_l$ – содержащие v **двумерные симплексы,** a_k **– грани симплексов** Δ_k**, противоположные вершине v,** $k = 1,\ldots,l$ **, и $L(v)$ – объединение ребер** $a_1,\ldots,a_l$**. Тогда граф $L(v)$ называется линком вершины v.**

Рассмотрим тор T^2, некоторую его точку u и окрестности $U \subset V \subset T^2$, гомеоморфные плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Тогда разность $T^2 \setminus U$ называют тором с дыркой. Если полиэдр P содержит подмножество H, состоящее

[1] Работа выполнена при поддержке корпорации Intel.

из двумерных симплексов, и гомеоморфное тору с дыркой, то H называют ручкой полиэдра.

Важнейшими инвариантами полиэдров являются группы гомологий. Здесь мы рассматриваем только одномерные группы гомологий с коэффициентами из группы $\boldsymbol{Z}_2$. Они имеют простой геометрический смысл и их легко определить без использования общей теории гомологий.

Любое множество n-мерных симплексов полиэдра P называют n-мерной цепью (n = 0,1,2). Если C и D – такие цепи, то цепь $C + D = (C \cup D) \setminus (C \cap D)$ считают их суммой. Относительно этой операции множество всех n-цепей становится абелевой группой. В этой группе нулем является пустая цепь, а $-C = C$. Границей ∂a ребра a считается нульмерная цепь, состоящая из его концов. Если $C = \{a_1, \dots, a_m\}$ – одномерная цепь, то $\partial C = \partial a_1 + \dots + \partial a_m$. При $\partial C = 0$ эта цепь считается циклом. Циклы C и D гомологичны, если $C + D = \partial Q$, где Q – двумерная цепь. Класс циклов, гомологичных C, обозначается символом $[C]$. Множество гомологических классов всех 1-циклов представляет собой группу относительно операции $[C] + [D] = [C + D]$. Эта группа обозначается символом $H_1(P)$ и называется одномерной группой гомологий полиэдра P (с коэффициентами из группы $\boldsymbol{Z}_2$).

Циклы, гомологические классы которых образуют базис группы $H_1(P)$, мы называем базисными циклами полиэдра или (точнее) ее одномерной группы гомологий. Знание базисных циклов во многих случаях позволяет найти ручки полиэдра. Например, если P – многообразие без края, то число его базисных циклов четно. При этом каждой ручке соответствует пара циклов, имеющих топологически нетривиальное пересечение.

Целью настоящей работы является создание алгоритмов, позволяющих быстро вычислять группы гомологий и находить указанные выше ключевые топологические элементы полиэдров, состоящих из очень большого числа (миллионов и более) симплексов. Полученные результаты могут найти применение в различных задачах, связанных с распознаванием топологического типа полиэдров.

1. АЛГОРИТМЫ.

Алгоритм 1.

Вход:

список вершин V, список ребер E и список двумерных симплексов T полиэдра P.

Выход**:**

1) одномерный подкомплекс $P^e \subset E$;

2) список L^b, состоящий из одномерных связных подкомплексов полиэдра.

3) нульмерный подкомплекс $V^c \subset V$;

4) для каждой вершины $v \in V^c$ одномерный подкомплекс $C(v) \subset E$.

Описание алгоритма.

1. Положим $P^e = \varnothing$ и $A = \varnothing$.

2. Для каждого ребра $a \in E$ выполним шаги 2.1 – 2.4.

2.1. Найдем число $t(a)$ инцидентных ребру a треугольников.

2.2. При $t(a)$ = 0 включим ребро a в список P^e, удалим из списка V его концевые вершины и перейдем к шагу 2.4.

2.3. При $t(a)$ > 2 включим ребро a в список A и также удалим из V его концы.

2.4. Переход к следующему ребру из списка E (конец цикла по a).

3. Найдем компоненты связности графа A и образуем из них список L^b.

4. Для каждой вершины $v \in V$ выполним шаги 5.1 – 5.6.

5.1. Положим $D = \varnothing$.

5.2. Найдем список $T(v)$ треугольников, инцидентных вершине v.

5.3. Для каждого треугольника из списка $T(v)$ найдем его ребро, противоположное вершине v, и включим в список D.

5.4. Вычислим компоненты связности графа D; из этих компонент образуем список $C(v)$.

5.5. Если количество элементов в списке $C(v)$ больше единицы, то включим вершину v в список V^c.

5.6. Переход к следующей вершине из списка V (конец цикла по v).

Конец алгоритма.

Предложение 1. **Пусть** P^e, L^b, V^c и $C(v)$ – списки, полученные, в результате работы алгоритма 1. Тогда P^e – список внешних ребер полиэдра P, L^b – список его линий ветвления, V^c – список изолированных особых точек, а $C(v)$ – линки вершин $v \in V^c$.

Для описания других алгоритмов нам понадобятся новые термины. Мы введем их в следующих определениях.

Одномерный подкомплекс $G \subset P$ договоримся называть *топологически полным графом полиэдра P*, если его группа гомологий $H_1(G)$ содержит группу $H_1(P)$ в качестве подгруппы.

Однородный полиэдр P назовем *регулярно связным*, если для любых двух его точек найдется соединяющий их путь в P, не проходящий через особые точки.

Сформулированное в предыдущем определении условие равносильно тому, что после удаления из полиэдра P всех его особых точек (то есть изолированных особых точек и линий ветвления) получится связное двумерное многообразие.

Пусть $P(1),\ldots,P(m)$ и P^e – симплициальные подпространства полиэдра P, обладающие свойствами:

- полиэдры $P(1),\ldots,P(m)$ однородны и регулярно связны;
- для различных номеров $i, j \in \{1,\ldots,m\}$ пересечения $P(i) \cap P(j)$ состоят из особых точек полиэдра P (т.е. из изолированных особых точек и ребер, лежащих на линиях ветвления);
- P^e – объединение внешних ребер полиэдра;
- имеет место равенство

$$P = P(1) \cup \ldots \cup P(m) \cup P^e. \qquad (1)$$

Тогда мы будем называть представление (1) *правильным разложением* полиэдра P.

Отметим, что разложение (1) в общей ситуации определено неоднозначно.

Если (1) – правильное разложение полиэдра P, $k \in \{1,\ldots,m-1\}$ и $R(k) = P(k+1) \cup \ldots \cup P(m)$, то пересечение $Q(k) = P(k) \cap R(k)$ договоримся называть *k-ым разрезом* разложения (1).

Алгоритм 2.

Вход**:**

1) список вершин V, список ребер E и список двумерных симплексов T полиэдра P;

2) для каждого ребра $a \in E$ список $T(a)$ инцидентных ему треугольников.

Выход**:**

1) двумерные подкомплексы $P(1),\ldots,P(m) \subset P$;

2) одномерные подкомплексы $Q(1),\ldots,Q(m-1)$, P^e и G полиэдра P.

Описание алгоритма.

1. Положим $k=1$, $G = \varnothing$, $P^e = E$ и $B = \varnothing$.

2. Построение комплексов $P(k)$, $Q(k)$ и $G(k) = G \cap (P(1) \cup\ldots\cup P(k))$.

2.1. Положим $P(k) = \varnothing$ и $Q(k) = \varnothing$.

2.2. Выбор начальных элементов.

2.2.1. Выберем симплекс $\Delta \in T$, добавим его в список $P(k)$ и удалим из списка T.

2.2.2. Из сторон треугольника Δ образуем список A, при этом для каждой его стороны a удалим Δ из списка $T(a)$ (A – переменный список активных ребер, вдоль которых далее будет происходить наращивание комплекса $P(k)$).

2.3. Основной алгоритм.

2.3.1. Выберем первое ребро $a \in A$ и удалим его из списков A и P^e.

2.3.2. Вычислим количество $t(a)$ элементов списка $T(a)$.

2.3.3. Если $t(a) = 1$, то включим симплекс $\Delta \in T(a)$ в список $P(k)$ и добавим в конец списка A две другие стороны b и c треугольника Δ. После этого удалим Δ из списков $T(b)$ и $T(c)$ и перейдем к шагу 2.3.6.

2.3.4. Если $t(a) > 1$ и $a \notin B$, то добавим a в список $Q(k)$ (при $k > 1$ B представляет собой объединение списков $Q(1),\ldots,Q(k-1)$).

2.3.5. Включим ребро a в список G.

2.3.6. Проверим список A. Если $A \neq \varnothing$, то перейдем к шагу 2.3.1.

При $A = \varnothing$ построение комплексов $P(k)$, $Q(k)$ и $G(k)$ закончено.

3. Проверим список T. Если $T \neq \varnothing$, то положим $B = B \cup Q(k)$, $k = k + 1$ и перейдем к шагу 2.

Равенство $T = \varnothing$ означает, что комплексы $P(1),\ldots,P(m)$ и $Q(1),\ldots,Q(m)$ найдены. При этом $Q(m) = \varnothing$.

4. Положим $G = G \cup P^e$ (окончание построения комплекса G).

Конец алгоритма.

Предложение 2. **Построенные в алгоритме 2 полиэдры** $P(1),\ldots,P(m)$ однородны, **регулярно** связны и вместе с одномерным комплексом P^e образуют правильное разложение полиэдра P. При этом для любого $k = 1,\ldots,m-1$ комплекс $Q(k)$ есть k-ый разрез этого разложения.

Предложение 3. **Полученный с помощью алгоритма 2 комплекс** G представляет собой топологически полный граф полиэдра P. При этом:

для всех $k = 1,\ldots,m$ край $\partial P(k)$ полиэдра $P(k) \subset P$ принадлежит графу G;

если $S(k)$ – подгруппы группы гомологий $H_1(G)$, порожденные циклами $\partial P(k)$, $S = S(1) \oplus \ldots \oplus S(m)$, то включение $j : S \to H_1(G)$ и индуцированный включением $i : G \to P$ гомоморфизм $i_* : H_1(G) \to H_1(P)$ образуют короткую точную последовательность

$$0 \to S \xrightarrow{j} H_1(G) \xrightarrow{i_*} H_1(P) \to 0 .$$

Алгоритм 3.

Вход**:**

1) список вершин V, список ребер E и список двумерных симплексов T полиэдра P;

2) для каждого ребра $a \in E$ список $T(a)$ инцидентных ему треугольников.

3) топологически полный граф G полиэдра P;

4) регулярно связные полиэдры $P(1),\dots,P(m)$ правильного разложения (1);

5) разрезы $Q(1),\dots,Q(m-1)$ разложения (1).

Выход**:** Список Z одномерных циклов.

Описание алгоритма.

1. Положим $Q(m) = \varnothing$.

2. Для k от m до 1 с шагом -1 выполним шаги 2.1 – 2.5 (удаление из графа G лишних ребер).

2.1. Найдем список D краевых ребер полиэдра $P(k)$.

2.2. Положим $B = D \setminus Q(k)$, $C = B \setminus Q(k-1)$, $B = B \setminus C$ (после этого $C = D \cap \partial P$, а $B = D \cap Q(k-1)$).

2.3. Проверим список C. Если $C \neq \varnothing$, то выберем ребро $c \in C$, удалим его из списка G и перейдем к шагу 2.5.

2.4. Проверим список B. Если $B \neq \varnothing$, то выберем ребро $b \in B$ и удалим его из списка G.

2.5. Конец цикла по k.

3. Найдем список Z фундаментальных циклов графа G.

Конец алгоритма.

Предложение 4. **Гомологические классы $[z_1],\dots,[z_r]$ найденных с помощью алгоритма 3 циклов $z_1,\dots,z_r \in Z$ образуют базис группы гомологий $H_1(P)$.**

Замечание **1. По поводу шага 3 алгоритма 2 см. [1].**

Замечание **2. Для полиэдра $P \subset \boldsymbol{R}^3$ набор $[z_1],\dots,[z_r]$ является базисом и целочисленной группы гомологий $H_1(P,\boldsymbol{Z})$.**

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ. СРАВНЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ МЕТОДАМИ.

Для конечного множества M символом $\operatorname{card} M$ обозначим количество его элементов. Для всех алгоритмов мы оценим асимптотику времени их работы в наихудшем случае.

Предложение 5. **Алгоритм 1 имеет вычислительную сложность $O(N \log N)$, где $N = \max\{\operatorname{card} V, \operatorname{card} E, \operatorname{card} T\}$.**

Предложение 6. **Алгоритм 2 позволяет построить правильное разложение полиэдра и найти его топологически полный граф за время $O(N_{12})$, где $N_{12} = \max\{\operatorname{card} E, \operatorname{card} T\}$.**

Предложение 7. **Вычисление группы гомологий $H_1(P)$ с помощью алгоритма 3 имеет сложность $O(N_{01})$, где $N_{01} = \max\{\operatorname{card} V, \operatorname{card} E\}$. При этом для выписывания каждого базисного цикла дополнительно требуется время $O(N_{01})$.**

В алгоритме 3 предполагаются уже построенными правильное разложение (1) и граф G. Для оценки сложности вычисления группы $H_1(P)$ **по заданному симплициальному комплексу нужно сложить время работы алгоритмов 2 и 3. В результате, мы получим сложность $O(N)$, где $N = \max\{\operatorname{card} V, \operatorname{card} E, \operatorname{card} T\}$.**

Классический алгоритм вычисления групп гомологий основан на приведении матриц инциденций симплексов соседних размерностей к нормальной диагональной форме [2]. Он является очень медленным – даже при использовании группы коэффициентов $\boldsymbol{Z}_2$ его асимптотическая вычислительная сложность $O(N^3)$. Группы целочисленных гомологий этим способом вычисляются еще медленнее (например, в [3] получен алгоритм приведения матриц к нормальной форме за время $O(N^{11})$, а в [4] – за время $O(N^5)$). Переход к кубическому разбиению полиэдров [5] позволяет уменьшить значение параметра N, но на асимптотику времени работы алгоритма не влияет.

Однако преимущество нашего метода состоит не только в его быстроте. Отказ от применения матриц приводит к значительной экономии памяти. Наконец, алгоритмы 2 и 3 достаточно просты с точки зрения реализации.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ.

Алгоритмы реализованы в виде библиотеки классов C++. Проверка работы произведена на моделях, взятых с сайта Стэнфордского университета. Использован компьютер IBM PC с памятью 768 мб. и процессором Celeron 850. Для сравнения группы гомологий и их базисные циклы найдены как с применением наших алгоритмов 2 и 3, так и помощью известного алгоритма, основанного на приведении матриц инциденций к нормальной форме. Выбирались такие модели, чтобы все вычисления можно было провести в оперативной памяти без обращения к жесткому диску.

Для матричного алгоритма указанное условие соблюдалось при работе с моделями, состоявшими самое большее из 40000 двумерных симплексов. Для одной из них базисные циклы были вычислены за 17 мин. 13 сек.

С помощью алгоритмов 2 и 3 базисные циклы той же модели найдены за 1,5 сек., то есть скорость решения задачи увеличилась почти в 700 раз.

Однако наши алгоритмы позволяют быстро вычислять группы гомологий и их базисные циклы для гораздо больших моделей. В частности, за 1 мин. 15 сек. получены базисные циклы модели, состоящей из 1087716 двумерных симплексов.

Для работы на таких моделях алгоритма, основанного на преобразованиях матриц, требуется слишком большой (реально сейчас недостижимый) объем памяти.

В заключение авторы хотели бы выразить искреннюю признательность Л.В. Нестеренко. Без ее активного содействия наше сотрудничество никогда бы не началось, а эта работа не была бы написана.

4. ЛИТЕРАТУРА.

[1] W. Lipski, Kombinatoryka dla programistow, Wydawnictwa naukowo-techniczne - Warszawa, 1982.

[2] А.Т. Фоменко. Наглядная геометрия и топология. М.: МГУ. 1992.

[3] T.J. Chou and G.E. Collins, Algorithms for the solution of linear Diophantine equations - SIAM J. Computing, 11, pp. 687-708 (1982).

[4] C.S. Iliopoulos, Worst-case complexity bounds on algorithms for computing the canonical structure of infinite abelian groups and Hermite and Smith normal form of an integer matrix - SIAM J. Computing, (18), 4, pp. 658-669 (1989).

[5] J. Chao and J. Nacayama, Cubical singular simplex model for 3D objects and fast computation of homology groups - Proc. IEEE, 190-194 (1996).

Об авторах.

Гордиенко Павел Андреевич – студент магистратуры ННГУ
E-mail: pavelx.gordiyenko@intel.com
Крахнов Александр Дмитриевич – к.ф.-м.н., зав. сектором НИИ ПМК ННГУ
E-mail: krh@unn.ac.ru
Яковлев Евгений Иванович – д.ф.-м.н., проф. ННГУ
E-mail: yei@uic.nnov.ru